封 面 ：

分类号________________ 密级________________

U D C________________ 编号________________

厦 门 大 学

博 士 后 研 究 工 作 报 告

复 *q*-Gamma 算子的逼近性质及(*p*,*q*)-整数的一个等价条件

蔡清波

工作完成日期 2016 年 6 月

报告提交日期 2016 年 6 月

厦门大学

2016 年 6 月

题名页

复 q-Gamma 算子的逼近性质及(p,q)-整数的一个等价条件

Approximation Properties of Complex q-Gamma operators and a Equivalent Condition of (p,q)-integer

博　　士　　后　　姓　　名　蔡清波

流动站（一级学科）名称　控制科学与工程

专　业（二级学科）名称　计算数学

研究工作起始时间　2014 年　9　月

研究工作期满时间　2016 年　6　月

厦 门 大 学

2016 年　6 月

厦门大学博士后研究工作报告

著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用博士后研究工作报告的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交该报告的纸质版和电子版，有权将该报告用于非赢利目的的少量复制并允许该报告进入学校图书馆被查阅，有权将该报告的内容编入有关数据库进行检索，有权将博士后研究工作报告的标题和摘要汇编出版。保密的博士后研究工作报告在解密后适用本规定。

本研究报告属于： 1、保密（ ）， 2、不保密（√）

纸本在 年解密后适用本授权书；

电子版在 年解密后适用本授权书。

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名: 日期： 年 月 日

摘要

内 容 摘 要

本文主要研究以下两个方面的内容：

（1）在复空间上研究复 q-Gamma 算子对解析函数的同时逼近阶和 Voronovskaya 型逼近定理；

（2）通过举出反例证明 Mursaleen 等人得到的(p,q)-算子的收敛性定理是错误的，并给出了一个(p,q)-整数趋于无穷的等价条件.

关键词：q-整数；(p,q)-整数；q-Gamma 算子；Voronovskaya 型定理；等价条件

英文摘要

Abstract

This paper mainly focuses on the following two aspects of content:

(1) The order of simultaneous approximation and Voronovskaya type theorem with quantitative estimate for complex q-Gamma attached to analytic functions in compact disks are obtained.

(2) We point out that the convergence theorem of (p,q)-operators which obtained by Mursaleen et al are not correct by giving a counter-example, we also give by deriving necessary and sufficient condition for (p,q)-integer tends to infinity.

Keywords: q-integer; (p,q)-integer; q-Gamma operators; Voronovskaya type theorem; Equivalent condition

目　录

目　　次

复 *q*-Gamma 算子的逼近性质及(*p*,*q*)-整数的一个等价条件

1．绪论

本章首先介绍本文所需要的基本定义，然后综述本文所研究问题的相关背景及研究进展，最后简单介绍一下本文所得到的主要结果.

1.1 基本定义

假设对任意固定的实数 $q>0$，下面给出 q 整数及 q 积分等若干定义（见[1]）：

定义 1.1.1 q-整数的有关定义：

对于非负整数 k，定义 q-整数：

$$[k]_q=\begin{cases}\dfrac{1-q^k}{1-q},q\neq 1,\\ k, \qquad q=1.\end{cases}$$

q-阶层定义为：

$$[k]_q!=\begin{cases}[k]_q[k-1]_q...[1]_q, k=1,2,...,\\ 1, \qquad\qquad\qquad k=0.\end{cases}$$

q-二项系数定义为：

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!},\ (n\geq k\geq 0).$$

定义 1.1.2 q-积分的有关定义：

对于 A>0，定义 q-improper 积分：

$$\int_0^{\infty/A}f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{q^n}{A}\right)\frac{q^n}{A},$$

假设右端级数绝对收敛.

定义 1.1.3 q-指数函数的有关定义及性质：

q-指数函数定义为：

$$E_q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q^{k(k-1)/2}\frac{x^k}{[k]_q!}=\big(1+(1-q)x\big)_q^{\infty}=\prod_{s=0}^{\infty}\big(1+q^s(1-q)x\big).$$

另一种形式：

$$e_q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{[k]_q!}=\frac{1}{\left(1-(1-q)x\right)_q^{\infty}},\ |x|<\frac{1}{1-q},$$

这里，$(1-x)_q^{\infty}=\prod_{j=0}^{\infty}\left(1-q^j x\right)$. 易知 $e_q(x)E_q(-x)=e_q(-x)E_q(x)=1.$

定义 1.1.4 q-Gamma 积分的有关定义及性质：

对于 t>0，q-Gamma 积分定义为：

$$\Gamma_q(t)=\int_0^{\frac{1}{1-q}}x^{t-1}E_q(-qx)d_q x.$$

q-Gamma 积分满足如下等式：

$$\Gamma_q(t+1)=[t]_q\Gamma_q(t),\ \Gamma_q(1)=1.$$

假设对任意固定的实数 $0<q<p\leq 1$ 及非负整数 k，下面给出 (p,q)-整数的若干定义（见[2]-[6]）：

定义 1.1.5 定义 (p,q)-整数 $[k]_{p,q}$ 为：

$$[k]_{p,q}=\frac{p^k-q^k}{p-q}.$$

(p,q)-阶层定义为：

$$[k]_{p,q}!=\begin{cases}[k]_{p,q}[k-1]_{p,q}\ldots[1]_{p,q}, & k=1,2,\ldots,\\ 1, & k=0.\end{cases}$$

(p,q)-二项系数定义为：

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}=\frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}![n-k]_{p,q}!},\ (n\geq k\geq 0).$$

1.2 研究背景及进展

在算子逼近论中，q-算子的研究是近十几年来的研究热点之一. 1987 年，Lupas（见[7]）首先提出 q-模拟 Bernstein 算子，并研究了该算子的收敛性和保形性. 然而，这类 q-算子是有理函数而不是多项式. 1997 年，Phillips（见[8]）提出了基于 q-整数的 q-Bernstein 多项式，并得到了算子的收敛定理及 Voronovskaya 定理. 此后，很多这方面的专家学者均致力于 q-算子的研究，基于经典的 Bernstein 算子、Baskakov 算子、Szasz 算子、MKZ 算子、BBH 算子、Gamma 算子、Beta 算子，以及它们的 Durrmeyer 型和 Kantorovich 型算子等等，结合 q-整数及 q-积分的定义和概念，定义了许多新的不同类型的 q-算子，并研究了它们的逼近性质，得到了很多漂亮的结果. 2015 年，Mursaleen 等人（见[9]-[14]）将 (p,q)-微积分的概念引入到逼近论中，提出了 (p,q)-拟 Bernstein

算子，并给出了相应的逼近性质.之后，相应的 Stancu 型、Schurer 型、Kantorovich 型、(p, q)-BBH 算子等等相继提出.

1.2.1 关于复空间上 q-Gamma 算子的逼近性质的研究

2008 年，Gal 的复 Favard-Szasz-Mirakjan 算子的逼近及集合性质（见[15]）；2009 年，Anastassiou 和 Gal 的 Schurer 及 Kantorovich-Schurer 型 Bernstein 算子在复空间上的逼近性质（见[16]）；2010 年，Gal 的复 genuine Durrmeyer 型算子在复空间上的逼近性质（见[17]）；2010 年，Mahmudov 的复 q-Szasz-Mirakjan 算子的逼近性质（见[18]）；2011 年，Gal 和 Gupta 的第一类复 Beta 算子及 Gupta 的 Bernstein-Durrmeyer 型算子的逼近性质（见[19][20]）.

1.2.2 关于 (p, q)-整数趋于无穷的等价条件的研究

2015 年，Mursaleen 等人将 (p, q)-整数引入算子逼近论，定义了一系列经典算子及相应的 Kantorovich 型、Durrmeyer 型的 (p, q) 推广型算子. 如：(p, q)-Bernstein 型、(p, q)-Bernstein-Stancu 型、(p, q)-Bernstein-Kantorovich 型、(p, q)-BBH 型、(p, q)-Bernstein-Schurer 型等等（见[9]-[14]）. 他们的收敛定理基于如下结论：

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1, \lim_{n\to\infty} q_n = 1\ (0 < q_n < p_n \le 1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} [n]_{p_n, q_n} = \infty.$$

我们将在本文的第三章证明如上的结论是不成立的.

1.3 本文主要工作概述

本文主要对复空间上的 Gamma 算子的逼近性质以及 (p, q)-整数趋于无穷的等价条件进行研究，得到了如下结果（注：本节中的定理、推论及性质的编号将引用它们在各自章节中的编号）.

1.3.1 复空间上 q-Gamma 算子的逼近性质

定 理 2.1.1 令 $D_R = \{z \in C; |z| < R\}\ (1 < R < \infty)$，假设 $f: [R+,\infty)\cup\overline{D_R}$ 在 $[R,+\infty)\cup\overline{D_R}$ 上连续，在 D_R 上解析，如：$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\ (z \in D_R)$，$f(z)$ 满足指数增长条件. 则有：

(i) 对于任意固定的 $1 \le r < 1/A$，设 $|z| \le r, n \ge 2\ (n \in N)$，有

$$\left|G_{n,q}(f;z)-f(z)\right| \le \frac{L_{q,r,A}}{[n]_q},$$

这里，$L_{q,r,A}=Mr^2A^2C_{q,r,A}$, $C_{q,r,A}$ 为仅依赖于 q, r, A 的常数.

(ii) 对于复 q-Gamma 算子的同时逼近，我们有：对任意固定的 $1 \le r \le r_1 < 1/A$, $|z| \le r, n > 2\ (n, p \in N)$, 有

$$\left|G_{n,q}^{(p)}(f;z)-f^{(p)}(z)\right| \le \frac{L_{q,r_1,A}}{[n]_q}\frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}},$$

这里，$L_{q,r_1,A}$ 如上所定义.

定理 2.1.2 设 $f:\overline{D_R}\cup[R,\infty)\to C$ 在 $\overline{D_R}\cup[R,\infty)$ 上连续有界，在 D_R 上解析. 对任意固定的 $1 \le r < 1/A$, $n \ge 2\ (n \in N)$, 有如下 Voronovskaya 型结果：

$$\left|G_{n,q}(f;z)-f(z)-\frac{z^2f''(z)}{[2]_q[n]_q}\right| \le \frac{J_{q,r,A}}{[n]_q^2},$$

这里，$J_{q,r,A}=\frac{1}{[2]_q^2}\sum_{k=3}^{\infty}[k-2]_q^2[k-1]_q(rA)^k<\infty.$

定理 2.1.3 在定理 2.2.1（i）的假设下，若 f 不是一个次数小于等于 1 的多项式，则有

$$\left\|G_{n,q}(f)-f\right\|_r \ge \frac{1}{[n]_q}U_r(f),\ (n \in N)$$

这里 $U_r(f)$ 为仅依赖于 f 与 r 的常数.

推论 2.1.4 在定理 2.2.1 和定理 2.2.3 的假设下，有

$$\left\|G_{n,q}(f)-f\right\|_r \succ\prec \frac{1}{[n]_q}, n \in N.$$

定理 2.1.5 在定理 2.2.1 的假设下，若对任意固定的 $1 \le r \le r_1 < 1/A$, f 是次数不低于 p-1 的多项式，则对于 $|z| \le r$ 及 $n, p \in N\ (n \ge 2)$, 有

$$\left\|G_{n,q}^{(p)}(f)-f^{(p)}\right\|_r \succ\prec \frac{1}{[n]_q}, n \in N.$$

1.3.2 (p,q)-整数的一个等价条件

反例 3.1.1 令 $p_n = 1-\frac{1}{n^{1-\theta}}, q_n = 1-\frac{2}{n^{1-\theta}}, 0<\theta<1, n>2^{\frac{1}{1-\theta}}$, 则 $0<q_n<p_n\le 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$. 而实际上，$\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n} = 0$.

定理 3.1.2 令 $n\in N$, 当 $n\to\infty$ 时，有

$$[n]_{p_n,q_n} \to \infty \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_n \to 0, \delta_n \to 0, & (A) \\ \varepsilon_n \log \delta_n / \varepsilon_n \to 0, \delta_n \ge c > 0, & (B) \end{cases}$$

这里，$\varepsilon_n \log \delta_n / \varepsilon_n = e^{n\beta_n}(\alpha_n - \beta_n)$.

注 3.1.3 定理 3.1.2 告诉我们，从定量的角度看，为了保证 $\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n} = \infty$, p_n 不能离 1 太远.

2．复空间上 q-Gamma 算子的逼近性质

设 $f:[0,\infty)\to R$, 实空间上的 Gamma 算子定义为：

$$G_n(f;x)=\frac{1}{x^n\Gamma(n)}\int_0^\infty f\left(\frac{t}{n}\right)t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt,\ x\in[0,\infty).$$

2005 年，Zeng 在文[21]中给出了如上 Gamma 算子在满足 f 是指数增长阶的条件下的逼近性质，得到了对局部有界函数和绝对连续函数的很好的逼近结果．本章，我们将以上 Gamma 算子推广到 q-Gamma 算子，并在复空间中讨论它的逼近性质．我们所讨论的复 q-Gamma 算子定义如下：

$$G_{n,q}(f;z)=\frac{1}{z^n\Gamma_q(n)}\int_0^{\infty/A} f\left(\frac{t}{[n]_q}\right)t^{n-1}E_q\left(-\frac{qt}{z}\right)d_qt.$$

假设 f(z) 满足如下指数增长条件：令 $D_R=\{z\in C;|z|<R\}$ $(1<R<\infty)$, 设 $f:[R,\infty)\cup\overline{D_R}\to C$ 在 $[R,\infty)\cup\overline{D_R}$ 上连续，在 D_R 上解析，如：$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$, $(z\in D_R)$, 则存在 $M, C, B>0, A$ 满足 $|c_k|\le Mq^{k(k-1)/2}A^k/[k]_q!$ $(k=0,1,\ldots)$，有 $|f(z)|\le ME_q(A|z|),(z\in D_R)$ 及 $|f(z)|\le Ce^{Bx}$, $(x\in[R,+\infty))$.

2.1　主要结论

复 q-Gamma 算子对解析函数同时逼近的定量估计：

定 理　2.1.1　令 $D_R=\{z\in C;|z|<R\}$ $(1<R<\infty)$, 假设 $f:[R,\infty)\cup\overline{D_R}$ 在 $[R,\infty)\cup\overline{D_R}$ 上连续，在 D_R 上解析，如：$|f(z)|=c_kz^k$ $(z\in D_R)$, $f(z)$ 满足指数增长条件．则有：

(i) 对于任意固定的 $1\le r<1/A$, 设 $|z|\le r, n\ge 2$ $(n\in N)$, 有

$$\left|G_{n,q}(f;z)-f(z)\right|\le\frac{L_{q,r,A}}{[n]_q},$$

这里，$L_{q,r,A}=Mr^2A^2C_{q,r,A}$, $C_{q,r,A}$ 为仅依赖于 q, r, A 的常数.

(ii) 对于复 q-Gamma 算子的同时逼近，我们有：对任意固定的 $1\le r\le r_1<1/A$, $|z|\le r, n>2$ $(n,p\in N)$, 有

$$\left|G_{n,q}^{(p)}(f;z)-f^{(p)}(z)\right|\le\frac{L_{q,r_1,A}}{[n]_q}\frac{p!r_1}{\left(r_1-r\right)^{p+1}},$$

这里，$L_{q,r_1,A}$ 如上所定义.

Voronovskaya 型逼近定理：

定理 2.1.2 设 $f:\overline{D_R}\cup[R,\infty)\to C$ 在 $\overline{D_R}\cup[R,\infty)$ 上连续有界，在 D_R 上解析. 对任意固定的 $1\le r<1/A,$，$n\ge 2\ (n\in N)$, 有如下 Voronovskaya 型结果：

$$\left|G_{n,q}(f;z)-f(z)-\frac{z^2f''(z)}{[2]_q[n]_q}\right|\le\frac{J_{q,r,A}}{[n]_q^2},$$

这里，$J_{q,r,A}=\frac{1}{[2]_q^2}\sum_{k=3}^{\infty}[k-2]_q^2[k-1]_q\left(rA\right)^k<\infty.$

定义 $\|p_k\|_r=\max\left\{|p_k(z)|:|z|\le r\right\}$, 这里，$p_k(z)$ 为次数不大于 k 的复多项式. 以下是复 q-Gamma 算子的确切逼近阶：

定理 2.1.3 在定理 2.2.1（i）的假设下，若 f 不是一个次数小于等于 1 的多项式，则有

$$\left\|G_{n,q}(f)-f\right\|_r\ge\frac{1}{[n]_q}U_r(f),\ (n\in N)$$

这里 $U_r(f)$ 为仅依赖于 f 与 r 的常数.

推论 2.1.4 在定理 2.2.1 和定理 2.2.3 的假设下，有

$$\left\|G_{n,q}(f)-f\right\|_r\succ\prec\frac{1}{[n]_q},n\in N.$$

定理 2.1.5 在定理 2.2.1 的假设下，若对任意固定的 $1\le r\le r_1<1/A,$ f 是次数不低于 p-1 的多项式，则对于 $|z|\le r$ 及 $n,p\in N\ (n\ge 2)$, 有

$$\left\|G_{n,q}^{(p)}(f)-f^{(p)}\right\|_r\succ\prec\frac{1}{[n]_q},n\in N.$$

2.2 预备结果

设 $e_k(t)=t^k,k=0,1,2,...,$ 则有

引理 2.2.1 对于 $n\in N, z\in C$, 以下等式成立：

$$G_{n,q}(e_k;z)=\frac{[n+k-1]_q!}{[n-1]_q![n]_q^k}e_k(z), \qquad (1)$$

$$G_{n,q}(e_k;z)=\frac{[n+k-1]_q z}{[n]_q}G_n(e_{k-1};z). \qquad (2)$$

证明：由复 q-Gamma 算子的定义及 Gamma 函数的性质，有

$$\begin{aligned}
&G_{n,q}(e_k;z)\\
&=\frac{1}{z^n\Gamma_q(n)}\int_0^{\infty/A}\left(\frac{t}{[n]_q}\right)^k t^{n-1}E_q\left(-\frac{qt}{z}\right)d_qt\\
&=\frac{z^k}{[n]_q^k\Gamma_q(n)}\int_0^{\infty/A}\left(\frac{t}{z}\right)^{n+k-1}E_q\left(-\frac{qt}{z}\right)d_q\frac{t}{z}\\
&=\frac{\Gamma_q(n+k)z^k}{[n]_q^k[n-1]_q!}=\frac{[n+k-1]_q!z}{[n-1]_q![n]_q^k}e_k(z),
\end{aligned}$$

可得（1），由（1）易得（2）成立.

引理 2.2.2 设 f 在 D_R 上解析， $f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_k z^k,(z\in D_R)$, 则对 $n\in N, 1\le r\le$ 有 $G_{n,q}(f;z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k G_{n,q}(e_k;z)$.

证明：由引理 2.2.1 可得 $G_{n,q}(e_k;z)$ 为次数不大于 k 的多项式，又由 f 满足的指数增长条件的假设，可知 $G_{n,q}(f;z)$ 在 D_R 上解析（见[22], pp. 1171-1172 和 p. 1178），从而，易得引理 2.2.2.

2.3 主要结论的证明

定理 2.1.1 的证明：(i) 设 $|z|\le r$, 由引理 2.1.2，有 $G_{n,q}(f;z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k G_{n,q}(e_k;z)$,

又因为 $G_{n,q}(e_0;z)=e_0(z)=1, G_{n,q}(e_1;z)=e_1(z)=z$, 从而

$$\left|G_{n,q}(f;z)-f(z)\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|\left|G_{n,q}(e_k;z)-e_k(z)\right|=\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\left|G_{n,q}(e_k;z)-e_k(z)\right|.$$

由引理 2.2.1，对于 $|z|\le r, n\in N$, 有

$$
\begin{aligned}
&\left|G_{n,q}(e_k;z)-e_k(z)\right| \\
&=\left|\frac{[n+k-1]_q z}{[n]_q}G_{n,q}(e_{k-1};z)-\frac{[n+k-1]_q z}{[n]_q}e_{k-1}(z)+\frac{[n+k-1]_q z}{[n]_q}e_{k-1}(z)-e_k(z)\right| \\
&\le\left|\frac{[n+k-1]_q z}{[n]_q}\right|\left|G_{n,q}(e_{k-1};z)-e_{k-1}(z)\right|+\left|e_k(z)\right|\left|\frac{[n+k-1]_q}{[n]_q}-1\right| \\
&\le\frac{[n+k-1]_q r}{[n]_q}\left|G_{n,q}(e_{k-1};z)-e_{k-1}(z)\right|+\frac{[k-1]_q r^k}{[n]_q},
\end{aligned}
$$

依次递推，由上面递推不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&\left|G_{n,q}(e_k;z)-e_k(z)\right| \\
&\le\frac{[n+k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n+k-2]_q}{[n]_q}\cdots\frac{[n+2]_q}{[n]_q}\frac{q^n r^k}{[n]_q}+\frac{[n+k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n+k-2]_q}{[n]_q}\cdots\frac{[n+3]_q}{[n]_q}\frac{q^n[2]_q r^k}{[n]_q} \\
&+\frac{[n+k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n+k-2]_q}{[n]_q}\cdots\frac{[n+4]_q}{[n]_q}\frac{q^n[3]_q r^k}{[n]_q}+\frac{[n+k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n+k-2]_q}{[n]_q}\cdots\frac{q^n[k-3]_q r^k}{[n]_q} \\
&+\frac{[n+k-1]_q}{[n]_q}\frac{q^n[k-2]_q r^k}{[n]_q}+\frac{q^n[k-1]_q r^k}{[n]_q} \\
&\le\frac{[n+k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n+k-2]_q}{[n]_q}\cdots\frac{[n+2]_q}{[n]_q}r^k q^n\left(\frac{1}{[n]_q}+\frac{2}{[n]_q}+\ldots+\frac{[k-1]_q}{[n]_q}\right) \\
&=\frac{[n+k-1]_q!}{[n+1]_q![n]_q^{k-2}}\frac{\left(1+[2]_q+\ldots+[k-1]_q\right)q^n r^k}{[n]_q}\le\frac{[n+k-1]_q!}{[n+1]_q![n]_q^{k-2}}\frac{[k]_q[k-1]_q r^k}{[n]_q},(|z|\le r,n\in N)
\end{aligned}
$$

由引理 2.2.2 及 c_k 的假设，对于 $n\ge 2,|z|\le r,$ 有

$$
\begin{aligned}
\left|G_{n,q}(f;z)-f(z)\right|&\le\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\left|G_{n,q}(e_k;z)-e_k(z)\right| \\
&\le M\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[n+k-1]_q!}{[n+1]_q![n]_q^{k-2}}\frac{[k]_q[k-1]_q r^k}{[n]_q}\frac{q^{k(k-1)/2}A^k}{[k]_q!} \\
&\le\frac{Mr^2A^2}{[n]_q}\sum_{k=2}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k-1\\k-2\end{bmatrix}_q\left(\frac{rA}{[n]_q}\right)^{k-2},
\end{aligned}
$$

由 Heine 二项公式（见[1]），有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{rA}{[n]_q}\right)^k = \frac{1}{\left(1-\dfrac{rA}{[n]_q}\right)_q^{n+2}}$$

$$\le \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{rA}{[n_0]_q}\right)_q^{n_0+2}}, & n=n_0 \\ \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{rA}{[n]_q}\right)_q^{\infty}} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{rA}{(1-q)[n]_q}\right)^j}{[j]_q!} = e_q\left(\dfrac{rA}{[n]_q}\right), n=\infty, \end{cases} \le C_{q,r,A}$$

这里，n_0 是一个有限数，$C_{q,r,A}$ 为仅依赖于 q, r, A 的常数. 从而，

$$\left|G_{n,q}(f;z)-f(z)\right| \le \frac{Mr^2A^2C_{q,r,A}}{[n]_q},$$

所以

$$\left|G_{n,q}(f;z)-f(z)\right| \le \frac{L_{q,r,A}}{[n]_q},$$

这里，$L_{q,r,A} = Mr^2A^2C_{q,r,A}$ $(1 \le r < 1/A)$.

(ii) 记 γ 为半径 $r_1 > r$ 中心为 0 的圆，由于对任意的 $|z| \le r, v \in \gamma$, 有 $|v-z| \ge r_1 - r$, 由 Cauchy 公式，对 $|z| \le r, n \in N, n \ge 2$, 有

$$\left|G_{n,q}^{(p)}(f;z)-f^{(p)}(z)\right| = \left|\int_{\gamma}\frac{G_{n,q}(f;v)-f(v)}{(v-z)^{p+1}}dv\right|$$

$$\le \frac{L_{q,r_1,A}}{[n]_q}\frac{p!}{2\pi}\frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^{p+1}} = \frac{L_{q,r_1,A}}{[n]_q}\frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}},$$

从而，(ii)得证，证毕.

定理 2.1.2 的证明：记

$$E_{q,k,n}(z) = G_{n,q}(e_k;z) - e_k(z) - \frac{q^n[k]_q[k-1]_q e_k(z)}{[2]_q[n]_q},$$

由于 $E_{q,0,n}(z) = E_{q,1,n}(z) = E_{q,2,n}(z) = 0$, 有